УРОК 5

Тема уроку: Точки екстремуму функції

Підручник з математики для 10-ого класу § 3 п.23

Перевірка домашнього завдання

Цього разу перевірку домашнього завдання проведемо у вигляді тестування. Кожен з вас може обрати рівень по своїм можливостям: Рівень А – полегшений http://surl.li/crsly , Рівень Б – складніший http://surl.li/crsme .

Пояснення нового матеріалу

Сьогодні на уроці нас будуть цікавити точки, в яких похідна змінює свій знак. Трішки теорії:

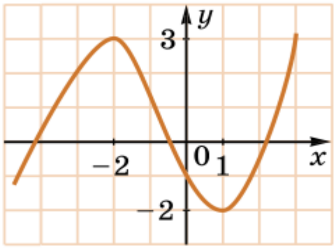
Для дослідження функції та побудови її графіка важливо знати *точки екстремуму* та *екстремуми функції*.

1. Екстремуми функції

Досліджуючи поведінку функції поблизу деякої точки, зручно користуватися поняттям *околу точки*.

Околом точки x_0 **називають будь-який проміжок, що містить цю точку.**

Наприклад, околом точки 2 може бути кожен з проміжків (1,9; 2,1) або (1; 2,5); околом точки −3 – проміжок (−3,8; −2,9) або (−3,01; −2,99) тощо.



Мал. 22.1

Приклад 1. Розглянемо графік функції $y = f(x)$, зображений на малюнку 22.1.

Бачимо, що існує такий окіл точки −2, що для всіх точок із цього околу функція $y = f(x)$ набуває найбільшого значення саме в точці −2. Таку точку називають *точкою максимуму* функції, а значення функції в цій точці – *максимумом функції*.

Точку x_0 називають *точкою максимуму* функції $y = f(x)$, якщо для всіх x з деякого околу точки x_0 справджується нерівність $f(x_0) > f(x)$. Значення функції в точці максимуму називають *максимумом функції*.

Будемо позначати точки максимуму через x_{max}, а максимуми функції через f_{max} або y_{max}. Отже, у прикладі 1 $x_{max} = -2$, а $y_{max} = y(-2) = 3$.

Повертаючись до малюнка 22.1, помічаємо, що існує деякий окіл точки 1, що для всіх точок із цього околу функція $y = f(x)$ набуває найменшого значення саме в точці 1. Таку точку називають *точкою мінімуму функції*, а значення функції в цій точці – *мінімумом функції*.

Точку x_0 називають *точкою мінімуму* функції $y = f(x)$, якщо для всіх x з деякого околу точки x_0 справджується нерівність $f(x_0) < f(x)$. Значення функції в точці мінімуму називають *мінімумом функції*.

Через $x_{\min}$ позначають точки мінімуму, а через $f_{\min}$ або $y_{\min}$ – мінімуми функції. У прикладі 1 $x_{\min} = 1$, а $y_{\min} = y(1) = -2$.

Точки максимуму і мінімуму разом називають *точками екстремуму* функції (від лат. *extremum – крайній*), а значення функції в цих точках – *екстремумами функції*.

Зауважимо, що оскільки в точці максимуму (мінімуму) функція набуває найбільшого (найменшого) значення порівняно зі значеннями цієї функції в точках деякого околу, то точки максимуму (мінімуму) називають ще *локальними екстремумами*.

2. Необхідна умова екстремуму

Покажемо, що точками екстремуму можуть бути лише критичні точки функції. Сформулюємо та доведемо відповідну теорему, яку називають *теоремою Ферма* (на честь французького математика П'єра Ферма).

Теорема Ферма (необхідна умова екстремуму). **Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна, то вона дорівнює нулю:**

$$f'(x_0) = 0.$$

Приймемо цей факт без доведення і зауважимо, що теорема Ферма є лише необхідною умовою екстремуму. Умова $f'(x_0) = 0$ необов'язково означає, що x_0 – точка екстремуму функції.

точками екстремуму функції можуть бути тільки її критичні точки.

Тому, знаходячи точки екстремуму функції, у першу чергу знаходять її критичні точки. При цьому треба пам'ятати, що не кожна критична точка є точкою екстремуму (приклад 2).

З'ясувати, чи є критична точка точкою екстремуму можна за допомогою теореми – достатньої умови екстремуму.

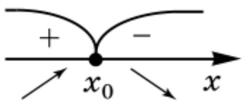
Теорема (достатня умова екстремуму). **Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 та:**

1) $f'(x) > 0$ на проміжку $(a; x_0)$ і $f'(x) < 0$ на проміжку $(x_0; b)$, то x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$;

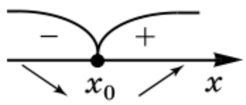
2) $f'(x) < 0$ на проміжку $(a; x_0)$ і $f'(x) > 0$ на проміжку $(x_0; b)$, то x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.

Якщо в точці x_0 похідна змінює знак з «+» на «–» (рухаючись у напрямі зростання x), то x_0 – точка максимуму (мал. 22.4), **а якщо з «–» на «+», то x_0 – точка мінімуму** (мал. 22.5).

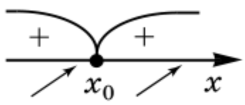
Якщо зміни знаків не відбулося (мал. 22.6 і 22.7), то x_0 не є точкою екстремуму.



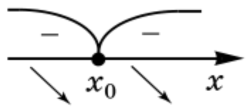
Мал. 22.4



Мал. 22.5



Мал. 22.6



Мал. 22.7

Таким чином, проміжки зростання, спадання та екстремуми функції пов'язані між собою. Тому *для знаходження екстремумів функції* можна застосувати такий алгоритм:

1) Знайти область визначення функції.
2) Знайти похідну функції.
3) Знайти критичні точки функції.
4) Позначити знайдені критичні точки на області визначення функції та знайти знак похідної на кожному з отриманих проміжків.
5) Для кожної критичної точки за знаком похідної на проміжках зліва і справа від неї визначити, чи є вона точкою екстремуму, і якою саме, максимуму чи мінімуму. Записати результат.

4. Задачі на пошук точок екстремуму та екстремумів функції

Розглянемо кілька задач.

Задача 1. Знайти точки екстремуму функції

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3.$$

Розв'язання. Скористаємося вище згаданим алгоритмом. 1) $D(y) = R$.

2) $y' = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$.

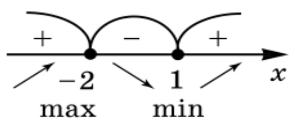
3) $D(y') = R$, $y' = 0$, маємо рівняння: $(x - 1)(x + 2) = 0$, звідки $x_1 = 1$; $x_2 = -2$ – критичні точки.

4) Позначимо критичні точки на $D(y)$ (числовій осі) і визначимо знак похідної на кожному з отриманих проміжків:

$y'(-5) = (-5 - 1)(-5 + 2) > 0$, тобто $y' > 0$ на $(-\infty; 2)$;

$y'(0) = (0 - 1)(0 + 2) < 0$, тобто $y' < 0$ на $(-2; 1)$;

$y'(2) = (2 - 1)(2 + 2) > 0$, тобто $y' > 0$ на $(1; +\infty)$.



Мал. 22.8

Результат зображено на малюнку 22.8.

5) Отже, $x_{max} = -2$; $x_{min} = 1$.

Відповідь. $x_{max} = -2$; $x_{min} = 1$.

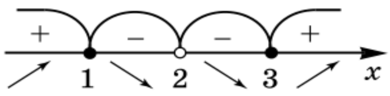
Задача 2. Знайти екстремуми функції $y = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$.

Розв'язання. 1) $D(y) = (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

2) $y' = \dfrac{2x(x-2) - 1(x^2 - 3)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.

3) $y' = 0$, тобто $\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 3$ – критичні точки.

4) Позначимо критичні точки на області визначення функції та з'ясуємо знак похідної на кожному з отриманих проміжків (мал. 22.9).



Мал. 22.9

5) Отже, $x_{max} = 1$; $x_{min} = 3$ – точки екстремуму.

Тоді $y_{max} = y(1) = \dfrac{1^2 - 3}{1 - 2} = 2$; $y_{min} = y(3) = \dfrac{3^2 - 3}{3 - 1} = 3$.

Відповідь: $y_{max} = y(1) = 2$; $y_{min} = y(3) = 3$.

За поданим вище алгоритмом на знаходження точок екстремуму, виконайте № 23.3 (3) або № 23.7 (3) з підручника. ПЕРЕВІР СЕБЕ

Домашнє завдання: § 3 п.23 № 23.4 (або № 23.8 для сильніших учнів)